Logica e Reti Logiche
(Episodio 3: Introduzione alla Logica Proposizionale)

Francesco Pasquale

12 ottobre 2026

Il linguaggio naturale, in cui tipicamente esprimiamo i nostri ragionamenti, è per sua natura intrinsecamente ambiguo. Per affrontare uno studio rigoroso del *ragionamento* dobbiamo quindi partire definendo un *linguaggio* non ambiguo con cui esprimerci.

In questo episodio iniziamo lo studio della "logica proposizionale", ossia quella in cui gli elementi del linguaggio sono le *proposizioni* (enunciati semplici che possono essere veri o falsi) e le *relazioni* fra proposizioni.

DRAFT

1 Lettere proposizionali, connettivi, tabelle di verità

Indichiamo con $p, q, r, \ldots$ delle variabili *Booleane*, ossia variabili che possono assumere valore `True` (`Vero`, che d'ora in poi indicheremo con `T`) o `False` (che d'ora in poi indicheremo con `F`). Chiamiamo *lettere proposizionali* i simboli $p, q, r, \ldots$ con cui indichiamo le variabili.

A partire dalle lettere proposizionali possiamo costruire delle *formule* più complesse usando i *connettivi*: data una variabile p, indichiamo con $\neg p$ la formula che è `T` se e solo se p è `F`; indichiamo con $p \vee q$ la formula che è `T` se e solo se almeno una fra p e q è `T` e con $p \wedge q$ la formula che è `T` quando p e q sono entrambe `T`. Possiamo sintetizzare queste affermazioni nelle cosiddette *tabelle di verità*

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

Conoscete altri connettivi oltre ai $\neg, \vee$ e $\wedge$, ossia *negazione*, *disgiunzione* e *congiunzione*? Sicuramente conoscete già anche $\rightarrow$ (*implicazione*) e $\equiv$ (*equivalenza*), che hanno le seguenti tabelle di verità

p	q	$p \rightarrow q$	$p \equiv q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	T

Ne conoscete altri? Quanti connettivi ci possono essere, in tutto? Vediamo...

p	q	$p \ ? \ q$
T	T	x
T	F	x
F	T	x
F	F	x

Siccome ognuna delle x nella tabella precedente può essere T o F, in tutto ci saranno 16 tabelle distinte.

Esercizio 1. Scrivere le 16 le tabelle di verità e provare a dare un "nome" a ognuna.

2 Formule ben formate

Ad ogni "formula" della logica proposizionale, possiamo associare una tabella di verità. Per esempio, la formula $p \wedge (q \vee \neg r)$ vale T se e soltanto se p è T e (q è T oppure r è F), quindi avrà la seguente tabella di verità

p	q	r	$p \wedge (q \vee \neg r)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

DRAFT

Esercizio 2. Scrivere le tabelle di verità delle seguenti formule:

1. $(p \to q) \vee \neg p$
2. $(p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
3. $(p \to (p \equiv q)) \vee \neg(p \vee q)$
4. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Osservate che non tutte le sequenze di lettere proposizionali e connettivi sono formule di cui possiamo dare una tabella di verità. Per esempio, provate a dare una tabella di verità per

$$p \to \neg \vee (q \wedge r) \equiv \tag{1}$$

Abbiamo bisogno di una definizione di *formula ben formata*.

Definizione 2.1 (Formule ben formate)**.** Le lettere proposizionali sono formule ben formate (abbreviato f.b.f., d'ora in poi). Inoltre

1. Se $\mathcal{F}$ è una f.b.f., allora anche $\neg\mathcal{F}$ è una f.b.f.
2. Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono f.b.f. allora anche $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})$ è una f.b.f., dove con $\circ$ abbiamo indicato uno qualunque dei connettivi $\wedge, \vee, \to, \equiv$.

3. Nient'altro è una f.b.f.

Esercizio 3. Osservate che tutte le formule dell'Esercizio 2 sono f.b.f. secondo la definizione precedente, mentre la sequenza di simboli in (1) non lo è.

Ogni formula ben formata ha la sua tabella di verità. Viceversa, data una qualunque tabella di verità possiamo sempre trovare una formula (tante, in realtà) che ha quella data come tabella di verità.

Esercizio 4. Per ognuna delle seguenti tabelle di verità, trovare una formula corrispondente

p	q	r	???
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

p	q	r	???
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

Come avete risolto l'esercizio precedente? Con un "metodo" o usando soltanto "intuito" e "forza bruta"? Nel secondo caso...

Esercizio 5. Trovare un metodo per costruire una formula con una data tabella di verità. *(Suggerimento: Se avete una tabella con una sola linea* `T` *e tutte le altre* `F`*, qual è una formula che fa al caso vostro? Trovata? Bene. Ora, se avete una formula con due linee* `T`*?...)*

3 Tautologie, contraddizioni e contingenze

Sicuramente già conoscete le formule di De Morgan. Quindi, secondo voi, come sarà fatta la tabella di verità della formula (2) qui sotto?

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \tag{2}$$

E quella della formula (3)?

$$(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \wedge q) \tag{3}$$

Esercizio 6. Verificate la vostra intuzione scrivendo esplicitamente le tabelle di verità delle formule (2) e (3).

Data una formula, chiamiamo *interpretazione* della formula un'assegnazione di verità alle sue variabili (osservate che, in una tabella di verità, ogni riga rappresenta una diversa interpretazione). Data una formula $\mathcal{F}$ e una sua interpretazione τ, la formula $\mathcal{F}$ è o `T` o `F` nell'interpretazione τ. Per esempio, la formula

$$(p \vee q) \wedge \neg r$$

DRAFT

è F nell'interpretazione $(p, q, r) = (\mathtt{T}, \mathtt{F}, \mathtt{T})$ mentre è T nell'interpretazione $(p, q, r) = (\mathtt{T}, \mathtt{F}, \mathtt{F})$

Si chiamano *tautologie* le formule che sono T in ogni interpretazione, *contraddizioni* quelle che sono F in ogni interpretazione e *contingenze* le altre (quelle che sono T in alcune interpretazioni e F in altre).

Esercizio 7. Per ognuna delle seguenti formule, dire se è una tautologia, una contraddizione, o una contingenza.

1. $(p \to q) \to (q \to p)$
2. $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$
3. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
4. $p \to \neg p$
5. $p \equiv \neg p$
6. $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$
7. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
8. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
9. $(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \vee q)$
10. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
11. $(p \equiv (p \wedge q)) \equiv (q \equiv (p \vee q))$

Osservate che $\mathcal{F}$ è una tautologia se e soltanto se $\neg\mathcal{F}$ è una contraddizione. E viceversa.

Diciamo che una formula $\mathcal{F}$ *implica logicamente* una formula $\mathcal{G}$ se la formula $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è una tautologia. Diciamo che due formule $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono *logicamente equivalenti* se la formula $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$ è una tautologia.

Esercizio 8. Osservare che

- $\mathcal{F}$ implica logicamente $\mathcal{G}$ se $\mathcal{G}$ è vera in tutte le interpretazioni in cui $\mathcal{F}$ è vera;
- $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono logicamente equivalenti se $\mathcal{G}$ è vera in tutte e sole le interpretazioni in cui $\mathcal{F}$ è vera.

4 Costanti

Abbiamo usato le lettere proposizionali $p, q, r, \ldots$ per indicare delle variabili Booleane. È utile aggiungere due lettere proposizionali, t e f, per indicare le due *costanti* Booleane T e F. Osservate, per esempio, che

- $p \wedge \mathtt{f}$ è equivalente a f mentre $p \wedge \mathtt{t}$ è equivalente a p;
- $p \vee \mathtt{f}$ è equivalente a p mentre $p \vee \mathtt{t}$ è equivalente a t;
- $\mathtt{f} \wedge \mathtt{t}$ è equivalente a f mentre $\mathtt{f} \vee \mathtt{t}$ è equivalente a t.

È interessante osservare che ogni formula che contiene t e/o f è sempre o equivalente a una formula che non contiene né t né f oppure è equivalente o a t o a f.

Esercizio 9. Ridurre le formule seguenti, che contengono le costanti t e f, a formule equivalenti che o non contengono né t né f, oppure sono uguali o a t o a f:

DRAFT

1. $((\mathtt{t} \to p) \wedge (q \vee \mathtt{f})) \to ((q \to \mathtt{f}) \vee (r \to \mathtt{t}))$
2. $(p \vee \mathtt{t}) \to q$
3. $\neg(p \vee \mathtt{t}) \equiv (\mathtt{f} \to q)$
4. $(\neg(p \vee \mathtt{f}) \wedge (q \equiv \mathtt{t})) \to (r \wedge \mathtt{t})$

5 Interdipendenza dei connettivi

Finora nelle nostre formule abbiamo usato i connettivi $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, e $\equiv$. Osservate che questi non sono tutti "necessari", perché per esempio,

- $p \to q$ è equivalente a $\neg p \vee q$, diciamo in questo caso che il connettivo $\to$ può essere definito in termini dei connettivi $\neg$ e $\vee$;
- $p \wedge q$ è equivalente a $\neg(\neg p \vee \neg q)$, quindi anche $\wedge$ può essere definito in termini di $\neg$ e $\vee$;
- $p \equiv q$ è equivalente a $(p \to q) \wedge (q \to p)$ o anche a $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, e siccome $\to$ e $\wedge$ possono essere definiti in termini di $\neg$ e $\vee$ anche $\equiv$ può essere definito in termini di $\neg$ e $\vee$.

Quindi potremmo riscrivere tutte le formule viste finora usando soltanto i due connettivi $\neg$ e $\vee$. In modo analogo, potremmo farlo usando soltanto i due connettivi $\neg$ e $\wedge$.

Esercizio 10. Definire ognuno dei connettivi $\vee$, $\to$, $\equiv$, in termini dei connettivi $\neg$ e $\wedge$.

Non c'è niente di speciale nelle coppie di connettivi scelte qui sopra. Potremmo usare altre combinazioni.

Esercizio 11.
1. Definire il connettivo $\wedge$ in termini dei connettivi $\neg$ e $\to$
2. Definire il connettivo $\equiv$ in termini dei connettivi $\wedge$ e $\to$
3. Definire il connettivo $\vee$ in termini del connettivo $\to$
4. Definire il connettivo $\neg$ in termini del connettivo $\to$ e di $\mathtt{f}$

Nell'esercizio precedente abbiamo sempre usato due connettivi per volta. E infatti non è possibile usare nessuno di quei connettivi, da solo, per definire tutti gli altri. Secondo voi esiste un qualche connettivo che, da solo, può essere usato per definire tutti gli altri? Fate prima la vostra scommessa, poi voltate pagina...

DRAFT

Considerate il connettivo seguente, che chiamiamo *joint denial* (lo chiameremo NOR, quando parleremo di circuiti)

p	q	$p \downarrow q$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Osservate che:

- $p \downarrow p$ è F quando p è T ed è T quando p è F. In altri termini, $p \downarrow p$ è equivalente a $\neg p$;
- La tabella di verità di $\downarrow$ è la negazione di quella di $\vee$, ossia $p \downarrow q$ è equivalente a $\neg(p \vee q)$. Ma allora $p \vee q$ deve essere equivalente a $\neg(p \downarrow q)$, che a sua volta, per il punto precedente, deve essere equivalente a $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.

Esercizio 12. Verificare che $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ ha la stessa tabella di verità di $p \vee q$.

Siccome possiamo definire i connettivi $\neg$ e $\vee$ in termini del connettivo $\downarrow$ per quanto visto all'inizio di questa sezione, possiamo definire anche tutti gli altri connettivi in termini del connettivo $\downarrow$.

Oltre a $\downarrow$, c'è un altro connettivo che, da solo, può essere usato per definire tutti gli gli altri: lo indichiamo con $|$ e lo chiamiamo *alternative denial* (oppure NAND).

p	q	$p \mid q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Esercizio 13. Definire i connettivi $\wedge$ e $\neg$ in termini del connettivo $|$.

6 Riepilogo

In questo episodio abbiamo iniziato a studiare la logica proposizionale, introducendone la *sintassi* (ossia, qual è la "forma" degli oggetti che studiamo: lettere proposizionali, connettivi, formule ben formate) e la *semantica* (ossia, qual è il loro "significato": tabelle di verità, interpretazioni). Abbiamo classificato le formule della logica proposizionale in *tautologie*, *contingenze* e *contraddizioni*. Infine abbiamo osservato che i connettivi non sono indipendenti fra loro e ne abbiamo individuato due "speciali".

DRAFT

A Bonus track: Notazione polacca

Se scriviamo $[\to pq]$ al posto di $[p \to q]$, $[\wedge pq]$ al posto di $[p \wedge q]$, $[\vee pq]$ al posto di $[p \vee q]$, e $[\equiv pq]$ al posto di $[p \equiv q]$, è possibile scrivere ogni formula ben formata in modo non ambiguo senza l'utilizzo di parentesi. Questo tipo di sintassi è detta *notazione polacca*. Ad esempio, la formula $\neg p \wedge (q \to \neg r)$ in notazione polacca diventa $\wedge \neg p \to q \neg r$.

Definizione A.1 (Formule ben formate, in notazione polacca)**.** Ogni lettera proposizionale è una f.b.f. Inoltre,

- Se $\mathcal{F}$ è una f.b.f. allora anche $\neg\mathcal{F}$ è una f.b.f.;
- Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono f.b.f. allora anche $\circ\mathcal{F}\mathcal{G}$ è una f.b.f., dove con il simbolo $\circ$ intendiamo uno qualunque dei connettivi binari;
- Nient'altro è una f.b.f.

Esercizio 14. Scrivere le formule $(p \to \neg q) \vee r$ e $(p \vee q) \wedge (\neg r \to p)$ in notazione polacca.

E per finire, un esercizio un po' più impegnativo.

Esercizio 15. Ad ogni sequenza $\mathcal{F}$ di simboli e lettere possiamo associare un numero in questo modo: contiamo $+1$ per ognuno dei simboli $\to, \wedge, \vee$ e $\equiv$, contiamo 0 per il simbolo $\neg$ e contiamo -1 per ogni lettera; infine associamo a $\mathcal{F}$ la somma dei numeri.

Sia $\mathcal{F}$ una sequenza di lettere e simboli. Dimostrare, per induzione sulla lunghezza di $\mathcal{F}$, che $\mathcal{F}$ è una f.b.f. in notazione polacca se e solo se il numero associato a $\mathcal{F}$ è -1 e la somma dei simboli di ogni segmento iniziale proprio (sottostringa iniziale) è maggiore o uguale a 0.

DRAFT