Logica e Reti Logiche

Anno Accademico: 2025-2026

Primo Test Intermedio

Docente: Francesco Pasquale

18 novembre 2025

Compito B

Ogni esercizio vale 6 punti. La sufficienza si raggiunge con 18 punti.

Esercizio 1. Sia $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 & = & 1 \\ a_n & = & 2a_{n-1} - n + 1 \qquad \text{per ogni } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $a_n = n + 1$, per ogni $n \geqslant 0$.

Esercizio 2. Per ognuna delle due formule seguenti dire se la formula è una tautologia, una contraddizione o una contingenza, motivando adeguatamente la risposta

1. $[p \to (q \vee r)] \equiv (p \to q) \vee (p \to r)$
2. $[(p \vee q) \to r] \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$

Esercizio 3. Sia $\mathcal{S}$ il sistema assiomatico definito dai seguenti schemi di assiomi

A1 : $X \to (Y \to X)$

A2 : $(X \to Y) \to [(X \to \neg Y) \to \neg X]$

e dalla regola di inferenza *Modus Ponens*. Dimostrare che nel sistema $\mathcal{S}$

$$\{p \to \neg q,\, q\} \vdash \neg p$$

Esercizio 4. Dire se la formula seguente è valida oppure no. In caso affermativo dimostrarlo usando il metodo dei *tableaux*, in caso negativo esibire un'interpretazione che rende falsa la formula

$$\exists x \forall y \neg P(x, y) \equiv \neg \forall x \exists y P(x, y)$$

Esercizio 5. Si considerino le due formule

$$\mathcal{A} : \exists x P(x) \wedge \neg \exists x Q(x) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B} : \forall x\, [P(x) \wedge \neg Q(x)]$$

Per ognuna delle quattro affermazioni seguenti, dire se l'affermazione è vera oppure no, motivando opportunamente la risposta:

1. $\mathcal{A}$ implica logicamente $\mathcal{B}$;
2. $\mathcal{B}$ implica logicamente $\mathcal{A}$;
3. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono logicamente equivalenti;
4. $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è una formula soddisfacibile.