

# Logica e Reti Logiche

## (Episodio 8: Il metodo dei *tableaux* per la Logica del Primo Ordine)

Francesco Pasquale

6 novembre 2025

Nell'Episodio 4 abbiamo introdotto il metodo dei *tableaux* per la logica proposizionale e nell'Episodio 5 abbiamo dimostrato che il metodo è *corretto* e *completo* (tutte e sole le formule della logica proposizionale dimostrabili con il metodo dei *tableaux* sono le tautologie).

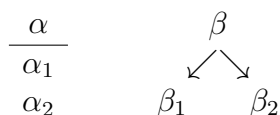
Qui vediamo come il metodo dei *tableaux* si può facilmente estendere alla logica del primo ordine. Per seguire questo episodio è necessario aver familiarizzato con il metodo dei *tableaux* per la logica proposizionale (Episodio 4) e aver assimilato sintassi e semantica della logica del primo ordine (Episodio 7).

### 1 Le regole per i quantificatori

Abbiamo visto che possiamo classificare essenzialmente tutte le formule della logica proposizionale in due tipi:  $\alpha$ -formule (quelle di tipo AND) e  $\beta$ -formule (quelle di tipo OR)

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$
$X \wedge Y$	$X$	$Y$	$X \vee Y$	$X$	$Y$
$\neg(X \vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg(X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$\neg(X \rightarrow Y)$	$X$	$\neg Y$	$X \rightarrow Y$	$\neg X$	$Y$

Ad ogni formula corrisponde una regola di estensione nei *tableaux*



Nella logica del primo ordine, in aggiunta alle  $\alpha$ -formule e  $\beta$ -formule, abbiamo anche le formule che coinvolgono i quantificatori: per esempio,  $\forall xP(x)$  e  $\exists xP(x)$ . Quali saranno le regole di estensione dei *tableaux* per questi tipi di formule? Vediamo.

$$\frac{\forall xP(x)}{P(a)} \quad \frac{\exists xP(x)}{P(a)}$$

Un momento... la stessa regola per entrambi? Non può essere... infatti manca ancora qualcosa, ma prima di andare a vedere cosa manca riflettiamo un attimo sul significato

delle due regole qui sopra. La prima traduce il ragionamento seguente: se è vero che la proprietà  $P$  vale per ogni elemento del dominio [ossia,  $\forall xP(x)$ ] allora prendiamo un elemento  $a$  per cui la proprietà  $P$  vale [ossia,  $P(a)$ ]. La seconda, questo: se è vero che deve esistere un elemento del dominio per cui vale la proprietà  $P$  [ossia,  $\exists xP(x)$ ], allora prendiamo un elemento  $a$  per cui la proprietà  $P$  vale [ossia,  $P(a)$ ]. Entrambi i ragionamenti sembrano corretti. Allora, cos'è che manca?



Quando incontriamo per la prima volta una formula del tipo  $\exists xP(x)$  e aggiungiamo  $P(a)$  al nostro *tableau*, questo è perfettamente legittimo, per il ragionamento che abbiamo fatto sopra. Ma immaginate che poi nel nostro percorso di scomposizione troviamo un'altra formula del tipo  $\exists xQ(x)$ . È legittimo aggiungere al nostro *tableau*  $Q(a)$ ? Beh, riflettete un attimo sul fatto che la risposta è no, non è legittimo: perché anche se esiste un elemento del dominio per cui vale la proprietà  $Q$ , questo elemento non è necessariamente lo stesso per cui vale la proprietà  $P$ . Quindi in questo caso dobbiamo istanziare la proprietà  $Q$  su un altro elemento, diciamo  $b$ .

E se dopo aver esteso  $\exists xP(x)$  con  $P(a)$  incontriamo una formula del tipo  $\forall xQ(x)$ ? Abbiamo lo stesso problema? Beh, no, perché siccome  $Q$  vale per tutti gli elementi del dominio, varrà anche per l'elemento  $a$  per cui vale la proprietà  $P$ .

Quindi, possiamo completare le nostre regole in questo modo

$\frac{\forall xP(x)}{P(a)}$	$\frac{\exists xP(x)}{P(a)}$
dove $a$ è un parametro qualunque	dove $a$ è un parametro mai usato prima

Oltre a quelle qui sopra, dobbiamo stabilire altre due regole: una per  $\neg\exists xP(x)$  l'altra per  $\neg\forall xP(x)$ .

**Esercizio 1.** Prima di procedere è utile fermarsi un attimo e ragionare intuitivamente su quali dovrebbero essere le regole per  $\neg\exists xP(x)$  e  $\neg\forall xP(x)$ .

Osservate che le formule  $\forall xP(x)$  e  $\neg\exists xP(x)$  sono di tipo *universale*, cioè si riferiscono a *tutti* gli elementi del dominio. Invece le formule  $\exists xP(x)$  e  $\neg\forall xP(x)$  sono di tipo *esistenziale*, cioè si riferiscono ad *almeno uno* degli elementi del dominio.

In analogia con quanto fatto per le formule della logica proposizionale, possiamo quindi classificare le formule della logica del primo ordine che coinvolgono i quantificatori in due categorie: le  $\gamma$ -formule (quelle di tipo UNIVERSALE) e le  $\delta$ -formule (quelle di tipo ESISTENZIALE) con le relative regole di estensione dei *tableaux*.

UNIVERSALI	ESISTENZIALI												
$\frac{\gamma}{\gamma(a)}$ dove $a$ è un parametro qualunque	$\frac{\delta}{\delta(a)}$ dove $a$ è un parametro mai usato prima												
<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\gamma</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\gamma(a)</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\forall xP(x)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>P(a)</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\neg\exists xP(x)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\neg P(a)</math></td> </tr> </table>	$\gamma$	$\gamma(a)$	$\forall xP(x)$	$P(a)$	$\neg\exists xP(x)$	$\neg P(a)$	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\delta</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\delta(a)</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\exists xP(x)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>P(a)</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\neg\forall xP(x)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\neg P(a)</math></td> </tr> </table>	$\delta$	$\delta(a)$	$\exists xP(x)$	$P(a)$	$\neg\forall xP(x)$	$\neg P(a)$
$\gamma$	$\gamma(a)$												
$\forall xP(x)$	$P(a)$												
$\neg\exists xP(x)$	$\neg P(a)$												
$\delta$	$\delta(a)$												
$\exists xP(x)$	$P(a)$												
$\neg\forall xP(x)$	$\neg P(a)$												

(1)

Come nel caso della logica proposizionale, diciamo che un ramo di un *tableau* è chiuso se sul ramo c'è sia una formula che la sua negata. Diciamo che un *tableau* è chiuso se tutti i suoi rami sono chiusi e diciamo che una formula  $\mathcal{F}$  è dimostrabile col metodo dei *tableaux* se partendo da  $\neg\mathcal{F}$  e applicando le regole per le  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  formule riusciamo a ottenere un *tableau* chiuso.

## 2 Esempi

**Esempio.** Consideriamo la formula

$$\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$$

Nell'episodio precedente, ragionando intuitivamente abbiamo osservato che è impossibile trovare una interpretazione che la rende falsa, quindi la formula è valida. Facciamo vedere che è dimostrabile col metodo dei tableaux

$$\begin{aligned} \neg [\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)] & \quad (1) \\ \forall xP(x) & \quad (2) \\ \neg\exists xP(x) & \quad (3) \\ P(a) & \quad (4) \\ \neg P(a) & \quad (5) \end{aligned}$$

Le formule (2) e (3) vengono dalla (1) applicando la regola  $\alpha$ , la (4) viene dalla (2) tramite la regola  $\gamma$  e la (5) dalla (3) sempre tramite la regola  $\gamma$ . La (4) e la (5) sono in contraddizione quindi il *tableau*, che ha un unico ramo, è chiuso.

**Esempio.** Consideriamo un'altra formula che abbiamo già incontrato

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$$

Se avete svolto l'Esercizio 4 dell'episodio precedente, dovrete già avere un'idea intuitiva del perché questa formula deve essere valida. Qui vediamo che è dimostrabile col metodo dei *tableaux*.

$$\begin{array}{rcl}
\neg[\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)] & & (1) \\
\exists x(P(x) \wedge Q(x)) & & (2) \\
\neg[\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)] & & (3) \\
P(a) \wedge Q(a) & & (4) \\
P(a) & & (5) \\
Q(a) & & (6) \\
\swarrow & & \searrow \\
(7) \quad \neg\exists xP(x) & & \neg\exists xQ(x) \quad (8) \\
(9) \quad \neg P(a) & & \neg Q(a) \quad (10)
\end{array}$$

Le formule (2) e (3) vengono da (1) (regola  $\alpha$ ), la (4) dalla (2) (regola  $\delta$ ), (5) e (6) da (4) (regola  $\alpha$ ), (7) e (8) da (3) (regola  $\beta$ ), infine (9) e (10) da (7) e (8) rispettivamente (entrambe regole  $\gamma$ ). Le formule (9) e (5) sono in contraddizione, così come le formule (10) e (6). Quindi entrambi i rami sono chiusi. La formula è dimostrata.

**Esercizio 2.** Se avete svolto l'Esercizio 4 dell'episodio precedente, saprete che l'implicazione inversa

$$\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

invece non è valida (se non l'avete già fatto, trovate una interpretazione in cui è falsa). Provate ad applicare il metodo dei *tableaux* a questa formula e vedrete che non riuscite a chiudere tutti i rami (se ci riuscite, state sbagliando ad applicare qualcuna delle regole...)

Le formule di tipo UNIVERSALE in un *tableau* possono essere estese più volte. E questo talvolta è necessario per ottenere un *tableau* chiuso.

**Esempio.** Consideriamo la formula

$$\exists y[P(y) \rightarrow \forall xP(x)]$$

Pensate che sia valida oppure no? Intanto vediamo che è dimostrabile

$$\begin{array}{rcl}
\neg\exists y[P(y) \rightarrow \forall xP(x)] & & (1) \\
\neg[P(a) \rightarrow \forall xP(x)] & & (2) \\
P(a) & & (3) \\
\neg\forall xP(x) & & (4) \\
\neg P(b) & & (5)
\end{array}$$

La (2) viene dalla (1) (regola  $\gamma$ ), (3) e (4) vengono dalla (2) (regola  $\alpha$ ). La (5) viene dalla (4) (regola  $\delta$ ), ma osservate che non ho potuto mettere  $\neg P(a)$  e trovare una contraddizione con la (3), perché la (4) è di tipo ESISTENZIALE, quindi devo usare un parametro che non ho già usato prima. Quindi? Il *tableau* non si chiude e la formula non è dimostrabile?



.....



La formula (1) è di tipo UNIVERSALE, quindi posso *riusarla* con un altro parametro!

$$\neg\exists y[P(y) \rightarrow \forall xP(x)] \quad (1)$$

$$\neg[P(a) \rightarrow \forall xP(x)] \quad (2)$$

$$P(a) \quad (3)$$

$$\neg\forall xP(x) \quad (4)$$

$$\neg P(b) \quad (5)$$

$$\neg[P(b) \rightarrow \forall xP(x)] \quad (6)$$

$$P(b) \quad (7)$$

$$\neg\forall xP(x) \quad (8)$$

La (6) viene dalla (1), la (7) e la (8) vengono dalla (6) e non c'è bisogno di proseguire sviluppando la (8) perché la (7) e la (5) sono in contraddizione e il *tableau* è chiuso.

**Esercizio 3.** Date tre interpretazioni diverse della formula  $\exists y[P(y) \rightarrow \forall xP(x)]$ . Verificate che in tutte le interpretazioni la formula è **T** e cercate una spiegazione intuitiva del perché la formula non può essere **F**.

**Esercizio 4.** Tornate alla formula  $\mathcal{F}$  dell'Esercizio 2 e osservate che non importa quante volte riusate le formule di tipo universale nello sviluppo del *tableau* che parte da  $\neg\mathcal{F}$ , lì non riuscite mai a ottenere una contraddizione.

**Esercizio 5.** Dimostrare col metodo dei *tableaux* le formule seguenti

1.  $\forall y[\forall xP(x) \rightarrow P(y)]$
2.  $\neg\exists yP(y) \rightarrow \forall y[\exists xP(x) \rightarrow P(y)]$
3.  $\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \equiv \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$
4.  $\exists x[P(x) \vee Q(x)] \equiv \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$

**Esercizio 6.** Considerate le due formule seguenti

$$\mathcal{F} : \forall x\exists yP(x, y) \quad \mathcal{G} : \exists y\forall xP(x, y)$$

Scegliete almeno una delle opzioni seguenti:

1.  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  è valida
2.  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  è valida
3. Nessuna delle due precedenti

- Se avete scelto solo 1, provate a trovare un *tableau* chiuso partendo da  $\neg(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G})$  e a dare una interpretazione in cui  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  è falsa.

- Se avete scelto solo 2, provate a trovare un *tableau* chiuso partendo da  $\neg(\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F})$  e a dare una interpretazione in cui  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  è falsa.

- Se avete scelto 3, provate a dare una interpretazione in cui  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  è falsa e una in cui  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  è falsa.

- Se avete scelto 1 e 2, provate a trovare un *tableau* chiuso partendo da  $\neg(\mathcal{F} \equiv \mathcal{G})$ .

- Se avete scelto 1 e 3, oppure 2 e 3, oppure 1, 2 e 3, beh... forse è il caso di andare a dormire e tornare a fare questo esercizio domani.

### 3 Conclusioni

In questo episodio abbiamo visto come si estende il metodo dei *tableaux* alla logica del primo ordine.

Sono sicuro che sapete già cosa ci aspetta nel prossimo episodio... Dobbiamo dimostrare che il metodo è *corretto* (ogni formula dimostrabile col metodo dei *tableaux* è valida) e *completo* (ogni formula valida è dimostrabile col metodo dei *tableaux*).

DRAFT